Πρόταση (Dini)

Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και (f_n) μια μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (δηλαδή $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$ ή $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο A, όπου $f \in C(A, \mathbb{R})$ τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη

Έστω $\varphi_n(x) := |f_n(x) - f(x)|$, $x \in A$, τότε

A) Έστω (f_n) αύξουσα ακολουθία, τότε $\lim_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$,

οπότε $f(x) \geq f_n(x)$ άρα $\varphi_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x)$, άρα (φ_n) φθίνουσα ακολουθία $\forall n$.

B) Εάν (f_n) είναι φθίνουσα τότε $f(x) = \lim_n f_n(x) = \inf\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ οπότε, $f(x) \leq f_n(x)$, $\forall n$.

Άρα $\varphi_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x)$ και εφόσον (f_n) φθίνουσα έπεται ότι (φ_n) φθίνουσα.

Άρα σε κάθε περίπτωση (φ_n) φθίνουσα ακολουθία.

Επιπλέον, $\varphi_n(x) \geq 0$, $\forall n$, $\forall x \in A$ και επίσης φ_n συνεχής εφόσον f_n και f είναι συνεχείς.

Επίσης, εφόσον $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο A οπότε εάν $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(x, \varepsilon)$ έτσι ώστε αν $x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $A_n := \{x \in A : \varphi_n(x) < \varepsilon\} = \varphi_n^{-1}(-\infty, \varepsilon)$.

Κάθε A_n είναι ένα ανοιχτό σύνολο ως αντίστροφη εικόνα του

ανοιχτού συνόλου $(-\infty, \varepsilon)$ μέσω της συνέχειας φ_n.
Εφόσον, $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο A, έπεται ότι $\varphi_n \xrightarrow{κσ} 0$ στο A.
Άρα για το παραπάνω $\varepsilon > 0$ έχουμε $|\varphi_n(x) - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$
ή $\varphi_n(x) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ ή $\varphi_n(x) \in (-\infty, \varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$ ή $x \in \varphi_n^{-1}(-\infty, \varepsilon)$
Άρα κάθε $x \in A$ ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τα A_n.

Οπότε $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Όμως A είναι συμπαγές σύνολο, οπότε

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}$ ώστε $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}$. Έστω $\Lambda = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$

Τότε λόγω ότι (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων
Ιδιαίτερα εάν $n_1 < n_2$, και $x \in A_{n_1} \Rightarrow x \in \varphi_{n_1}^{-1}(-\infty, \varepsilon) \Rightarrow \varphi_{n_1}(x) \in (-\infty, \varepsilon)$

αλλά (φ_n) φθίνουσα, οπότε $\varphi_{n_2}(x) \leq \varphi_{n_1}(x) \in (-\infty, \varepsilon)$, άρα
$\varphi_{n_2}(x) \in (-\infty, \varepsilon) \Rightarrow x \in \varphi_{n_2}^{-2}(-\infty, \varepsilon) \Rightarrow x \in A_{n_2}$

Οπότε εφόσον $\Lambda > \lambda_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Έπεται ότι

$A_{\lambda_i} \subseteq A_\Lambda$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Επομένως $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i} \subseteq A_\Lambda \cup \ldots \cup A_\Lambda$

Άρα, εάν $x \in A \Rightarrow x \in A_\Lambda$ και ισοδύναμα $\varphi_\Lambda(x) < \varepsilon$. Τα
παραπάνω ισχύουν για τυχαίο $x \in A$. Άρα $\varphi_\Lambda(x) < \varepsilon$, $\forall x \in A$
Επίσης εάν $n \geq \Lambda$, τότε για $x \in A$ (εφόσον η (φ_n) είναι
φθίνουσα) έχουμε $\varphi_n(x) \leq \varphi_\Lambda(x)$ $\forall n \geq \Lambda$
Άρα $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq \Lambda$ $\forall x \in A$ οπότε
$f_n \xrightarrow{ομοιομ} f$ στο A. (Μια μικρή απόδειξη για ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Γενικά, όσο αφορά τις ακολουθίες f_n συνεχών συναρτήσεων
το όριό τους μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε μη συνεχής
συνάρτηση ανεξάρτητα από το αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορ-
φη ή όχι.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, $0<x<1, n\in N$

i) Ν.δ.ο. η (f_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία.

ii) Δ.ο. η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στο $(0,1)$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

α) Εφόσον, $n+1>n \underset{x\in(0,1)}{\Rightarrow} (n+1)x > nx \Rightarrow \frac{1}{(n+1)x+1} < \frac{1}{nx+1} \Rightarrow$

$f_{n+1}(x) < f_n(x)$ $\forall n\in N$. Άρα (f_n) φθίνουσα ακολουθία.

β) Επιπλέον, για $x\in(0,1)$ $f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \xrightarrow{n} 0$

Άρα $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο $(0,1)$ όπου $f(x)=0$, $x\in(0,1)$. Όμως εάν, $0<\varepsilon<1$. Έχουμε $|f(x)-0|<\varepsilon$, $\frac{1}{nx+1}<\varepsilon$, $n > \frac{1/\varepsilon - 1}{x}$

Άρα $N_\varepsilon(x) = \left[\frac{1/\varepsilon - 1}{x}\right]+1$. Αλλά αν $g(x) = \frac{1/\varepsilon - 1}{x}$, $x\in(0,1)$

τότε $g'(x) = \frac{1-1/\varepsilon}{x^2} < 0$. Άρα g φθίνουσα στο $(0,1)$ και

$\sup\{N_\varepsilon(x) : x\in(0,1)\} = \lim_{x\to 0^+}\left(\left[\frac{1/\varepsilon - 1}{x}\right]+1\right) = +\infty$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

β' τρόπος

$\rho_n(f_n, f) = \min\{1, \sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\}$ αλλά $\sup_{x\in A}|f_n(x)-0| =$

$= \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{nx+1} = 1$, άρα $\rho_n(f_n, f) = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην προηγούμενη Άσκηση η (f_n) είναι μια μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει κατά σημεία σε μια συνεχή συνάρτηση f. Όμως το πεδίο ορισμού $A=(0,1)$ δεν είναι συμπαγές. Ισχύουν δηλαδή όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις του θεωρήματος Dini εκτός του ότι το A είναι συμπαγές, επομένως δεν μπορούμε να το εφαρμόσουμε. Άρα η απαίτηση A συμπαγές είναι ουσιώδης.

Άσκηση

Ν.δ.ο. η $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,2]$

Το $A=[0,2]$ είναι ένα συμπαγές σύνολο. Κάθε f_n είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,2]$. Επίσης, $f_n(x) \geq 0 \ \forall n$. Ακόμη,

$$\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} \ (\text{για } n>1) = \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^n}\left(1+\frac{x}{n-1}\right) = \left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n-1}}\right)^n\left(1+\frac{x}{n-1}\right) =$$

$$= \left(1-\underbrace{\frac{x}{n^2-n+nx}}_{a}\right)^n\left(1+\frac{x}{n-1}\right)$$

(*) Από την ανισότητα Bernoulli γνωρίζουμε ότι:

$(1+a)^n \geq 1+na, \ a>-1, \ n\in\mathbb{N}$

Οπότε, εφόσον $n>1 \Rightarrow x \leq nx < nx+n^2-n$, άρα

$$\frac{x}{nx+n^2-n} < 1 \Rightarrow -\frac{x}{n^2-n+nx} > -1$$

Άρα από (*) έχουμε $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = \left(1-\frac{x}{n^2-n+nx}\right)^n\left(1+\frac{x}{n-1}\right) \geq$

$$= \left(1-\frac{nx}{n^2-n+nx}\right)\left(1+\frac{x}{n-1}\right) = \dots = \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)\left(\frac{n-1+x}{n-1}\right) = 1$$

Άρα $f_n(x) \geq f_{n-1}(x) \ \forall n, \ \forall x\in[0,2]$. Οπότε $(f_n) \nearrow$ αύξουσα

Επίσης $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n} f(x) = e^x$, $x \in [0,2]$

Άρα $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ στο $[0,2]$ και f συνεχής στο $[0,2]$

- Άρα με εφαρμογή του Θεωρήματος Dini, $f_n \xrightarrow{ομ/μα} f$ στο $[0,2]$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$B(A,\mathbb{R})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $F(A,\mathbb{R})$.
(Εάν $f,g \in B(A,\mathbb{R})$, τότε $f+g \in B(A,\mathbb{R})$, $\lambda f \in B(A,\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$)
Θεωρούμε έναν γραμμικό υπόχωρο $H(A,\mathbb{R})$ και $B(A,\mathbb{R})$. Έστω επίσης μια απεικόνιση $T: H(A,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γραμμική. Μια τέτοια απεικόνιση λέγεται γραμμικό συναρτησοειδές.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο διάστημα αυτό. Ονομάζουμε το σύνολο αυτών των συναρτήσεων $H([a,b],\mathbb{R})$. Το σύνολο αυτό είναι γραμμικός υπόχωρος του $B([a,b],\mathbb{R})$ (διότι $f,g \in H([a,b],\mathbb{R})$ τότε $f+g \in H([a,b],\mathbb{R})$ και $\lambda f \in H([a,b],\mathbb{R})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η απεικόνιση $T: H([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$.

T είναι γραμμική, άρα T γραμμικό συναρτησοειδές

▷ Εάν H είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $[a,b]$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο (a,b).
Το H είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $B([a,b],\mathbb{R})$
(διότι f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow f$ φραγμένη στο $[a,b]$)
και αν f,g παραγωγίσιμη στο (a,b) τότε και $f+g$ παραγ.

και λf, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$
Η απεικόνιση $T: H \to F(A,\mathbb{R})$, $f \to f'$
Η T είναι γραμμική απεικόνιση.

Πρόταση

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
Έστω επίσης $H(A,\mathbb{R})$ γραμμικός υπόχωρος του $(B(A,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$
και $T: H(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. ΤΑΕΙ:
i) T είναι συνεχής
ii) $\exists M \geq 0$ τ.ω $|T(f)| \leq M\|f\|$, $\forall f \in H(A,\mathbb{R})$

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι T είναι συνεχής. Τότε για $\varepsilon = 1$ έχουμε ότι $\exists\, \delta > 0 : \|f-0\| < \delta \Rightarrow |T(f)-T(0)| < \varepsilon$, αλλά από υπόθεση T γραμμική. Οπότε $T(0) = T(0+0) = T(0)+T(0) \Rightarrow T(0) = 0$
Οπότε, εάν $f \in H$ με $\|f\| \leq \delta \Rightarrow |T(f)| < \varepsilon = 1$ $(*)$
Θ.δ.ο. $|T(f)| \leq \frac{1}{\delta}\|f\|$ $\forall f \in H$ (1)

Έστω $f \in H$. Τότε
i) Εάν $f = 0$, τότε η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα.
ii) Εάν $f \neq 0$, τότε έστω $g = \frac{\delta}{\|f\|} \cdot f$. Τότε $\|g\| = \frac{\delta}{\|f\|}\|f\| = \delta \leq \delta$

Οπότε, λόγω της $(*)$ $|T(g)| < 1 \Rightarrow \left|T\left(\frac{\delta}{\|f\|} f\right)\right| < 1 \underset{T \text{ γραμ.}}{\Rightarrow} |T(f)| \leq \frac{1}{\delta}\|f\|$

Άρα $\exists M = \frac{1}{\delta} > 0$

Ισχύει ότι $|T(f)| \leq M\|f\| < M'\|f\|$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι $\exists M > 0$ τ.ω. $|T(f)| \leq M\|f\|$ $\forall f \in H$. Θ.δ.ο. T συνεχής.
Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Τότε εάν $f, g \in H$ με $\|f-g\| < \delta$
έχουμε $|T(f)-T(g)| = |T(f-g)| \leq M\|f-g\| < M \cdot \delta \left(= \frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon$
δηλαδή, T ομοιόμορφα συνεχής, άρα και συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $H(A,\mathbb{R})$ υπόχωρος του $B(A,\mathbb{R})$ (γραμμικός υπόχωρος) όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό και έστω επίσης $T: H(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ γραμμική. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) $\exists M \geq 0$ τ.ω. $|T(f)| \leq M\|f\|, \forall f \in H(A,\mathbb{R})$

ii) $\exists M' \geq 0$ τ.ω. $|T(f)| < M', \forall f \in H(A,\mathbb{R}), \|f\| \leq 1$